

## Lec 17 函数极限习题课

### 17.1 几个基本概念

1. 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

**例 17.1**  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x, x^m (m > 0), \tan x, e^x - 1, 1 - \cos x$  都是无穷小量;

$n \in N^*, n \rightarrow \infty$  时,  $n^n, n!, a^n (a > 1), n^A (A > 0), \ln n$  都是无穷大量.

**注** 请区分,  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  是函数极限, 而  $x \rightarrow 0$  时  $x$  是无穷小量. 前者是相等关系, 后者是趋于 0. 期中考试有很多同学在分母写出了  $\lim_{x \rightarrow 0} x$  的形式, 这是错误的.

2. 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 且  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 若  $f(x)$  在区间  $I$  上每一点都连续, 则称  $f(x)$  在  $I$  上连续. 当  $f(x)$  在  $x_0$  处连续时, 有  $f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

3. 幂 ( $x^\alpha, \alpha$  为常量), 指数 ( $a^x, a > 0$ ), 三角函数 ( $\sin x, \cos x, \tan x$ ), 对数函数 ( $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ ), 指数函数 ( $e^x$ ), 反三角函数 ( $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ ), 双曲函数 ( $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ ) 等函数在其定义域内均连续. 一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

**注** 我们常说的常数是一个相对的概念, 需要结合语境去理解. 比如  $a_n = Mn$ ,  $M$  是一个常数, 因为他与我们在此处关注的  $n$  是无关的, 但是  $a_n$  就不是常数. 在幂函数中, 指数  $\alpha$  是一个常数, 但是  $x$  是一个变量, 所以  $x^\alpha$  是一个关于  $x$  的函数. 之后讲求导法则的时候, 需要搞清楚谁是与  $x$  有关的变量, 谁是常数.

### 17.2 无穷大的大小

#### 命题 17.1 (常用数列无穷大)

设  $a, A, m$  为常数, 且  $a > 1, \alpha > 0, m > 0$ , 证明:  $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$ , 在  $n \rightarrow \infty, n \in N^*$  时成立; 其中  $n^n \gg n! \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ , 称为  $n^n$  是  $n!$  的高阶无穷大. ♠

**证明**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 故  $n^n \gg n!$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n}$ , 其中  $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1}$  是与  $n$  无关的常数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ , 故  $n! \gg a^n$ .
3. 先设  $\alpha \in N^*, a = 1 + \lambda$ , 则  $\lambda > 0, a^n = (1 + \lambda)^n > C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}$ . 故  $0 > \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

4. 仅证  $m = 1$  时, 令  $n^\alpha = y$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ , 且  $\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln y}{y}$ . 设  $k \leq y \leq k+1$ , 则  $\frac{k}{k+1} < \frac{\ln y}{y} < \frac{\ln(k+1)}{k}$ , 故  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ .

### 命题 17.2 (常用函数无穷大)

设  $a, A, m$  为常数, 且  $a > 1, \alpha > 0, m > 0$ , 证明:  $x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m$ , 在  $x \rightarrow +\infty, x > 0, x \in R$  时成立.

### 证明

1. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\begin{cases} n^n \leq n^x < (n+1)^n, \\ a^n \leq a^x < a^{n+1}, \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{a^x}{x^x} < \frac{a^{n+1}}{n^n}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$ , 故  $x^x \gg a^x$ .
2. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\frac{n^\alpha}{a^{n+1}} < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^{n+1}} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty$ , 故  $x^x \gg x^\alpha$ .
3. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty$ , 故  $x^x \gg x^\alpha$ .

### 例 17.2 证明:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0, a \neq 1$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \neq 0$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = e^{12}$ .

注 上述例 1 ~ 6 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当  $x \rightarrow 0$  时,


1.  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2}$ ;
2.  $\arcsin x \sim x$ ;
3.  $\ln(1+x) \sim x$ ;
4.  $e^x - 1 \sim x$ ;
5.  $a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$ ;
6.  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$ .

### 证明

1.  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arcsin x} = 1$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$ .
4. 令  $e^x - 1 = u$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \ln(1+u)$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \ln(1+u)} = 1$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a$ , 令  $u = x \ln a$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \frac{u}{\ln a}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \ln a$ .
6. 令  $u = \alpha \ln(1+x)$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \frac{u}{\alpha}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha = \alpha$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{x} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .
8.  $\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} = 1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \rightarrow 1 + 0 = 1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \right)^{\frac{x^2 + 6}{3x - 11} \cdot \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = e^{12}$ .

**注** 其中 7, 8 为底数与指数皆为变量, 且底数的极限值为 1, 指数的极限值为  $+\infty$ , 这种形式的极限求解时, 可以尝试取对数, 然后利用对数函数的连续性, 将指数提取出来, 再求极限. 我们称这种形式的极限为  $1^\infty$  型不定式.

不定式是相对于  $\alpha(x)^{\beta(x)}$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  都有非 0 常数极限而言的, 后者很好求极限. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \beta$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)^{\beta(x)} = \alpha^\beta$ . 当  $\alpha, \beta$  中有  $0, +\infty$  时, 则需要仿照 7, 8 的方法进行求解.

 **作业** ex1.3:4,9(1)(2),10(1)(2)(4),11(1)(2).